全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学

基础版

选择性必修第二册 RJA

数智教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

AI时代就该用AI学习
遇到问题快扫我

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

第四章 数列

4.1 数列的概念

讲课智能体

第1课时 数列的概念与表示

【学习目标】

1. 了解数列的概念，知道什么是数列，能说出数列的项.

2. 了解数列的表示方法，会用表格、图象、通项公式表示数列，能用通项公式求任意项或根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.

3. 了解数列与函数的关系，能用函数的观点看待数列，并能说出数列与函数的共性与差异.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 数列的概念与分类

1. 数列的概念

按照确定的________排列的一列数称为数列.

2. 数列的项

(1)数列中的__________叫作这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫作这个数列的第1项，常用符号________表示，第二个位置上的数叫作这个数列的第2项，用________表示……第n个位置上的数叫作这个数列的第n项，用________表示.其中第1项也叫作________.

(2)数列的一般形式是$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为________.

3. 数列的分类

分类标准	名称	含义
按项的个数分类	有穷数列	项数________的数列
	无穷数列	项数________的数列
按项的变化趋势分类	递增数列	从第2项起，每一项都________它的前一项的数列
	递减数列	从第2项起，每一项都________它的前一项的数列
	常数列	各项都________的数列

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)李萍从6岁到18岁，每年生日那天测量体重，依次排成一列数，可以构成数列. ( )

(2)数列$-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\cdots$是递减数列且是无穷数列. ( )

(3)数列1,3,5,7,9与数列9,7,5,3,1是同一个数列. ( )

(4)符号a_n和$\{a_n\}$表示的意思相同. ( )

典例解析

例1 (1)下列说法正确的是 ( )

A. 数列4,7,3,4的首项是4

B. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=3$，则从第2项起，各项均不等于3

C. 数列3,6,8可以表示为$\{3,6,8\}$

D. $a,-3,-1,1,b,5,7,9,11$一定能构成数列

(2)已知下列数列：①$1,0.84,0.84^2,0.84^3$；②$2,4,6,8,10,\cdots,2n,\cdots$；③$7,7,7,7,\cdots$；④$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots$；⑤$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$；⑥$0,-1,2,-3,4,-5,\cdots$.

其中，有穷数列是________，无穷数列是________，递增数列是________，递减数列是________，常数列是________.(填序号)

[素养小结]

判断数列的类型应注意的几个方面：(1)判断一个数列是有穷数列还是无穷数列的关键是判断数列的项数是有限的还是无限的；(2)判断一个数列的单调性一般是根据数列中的a_{n+1}与a_n的大小来判断，即①若数列$\{a_n\}$满足$a_n<a_{n+1}$，则是递增数列，②若数列$\{a_n\}$满足$a_n>a_{n+1}$，则是递减数列.

◆ 要点二　数列的表示

1. 通项公式:如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与它的序号________之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的__________.

注意:有些数列的通项公式不唯一.

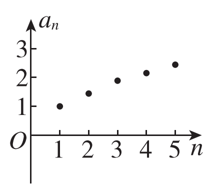
2. 通项公式就是数列的函数解析式,以前我们学过的函数的自变量通常是连续变化的,而数列是自变量为离散的数(正整数)的函数.

3. 数列的其他表示法

(1)表格表示,如下表.

n	1	2	3	…
a_n	a_1	a_2	a_3	…

(3)图象表示,如图.



【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)有些数列没有通项公式.　　(　　)

(2)若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$,则数列$\{a_n\}$的图象与函数$y=2x-1$的图象相同.　(　　)

典例解析

角度1　已知通项公式写数列的项

例2 根据数列$\{a_n\}$的通项公式,写出数列的前5项,并用图象表示出来.

(1)$a_n=\frac{1}{2}n-1$;

(2)$a_n=\sin\frac{(n+2)\pi}{2}$.

变式 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n^2-28n$.

(1)写出数列$\{a_n\}$的第4项和第6项.

(2)-49和68是否为该数列的项?

[素养小结]

(1)数列$\{a_n\}$的通项公式给出了第n项a_n与它的位置序号n之间的关系,只要用序号代替公式中的n,就可以求出数列中相应的项.

(2)判断某个数是否为数列中的项,需先假设它是数列中的项,然后列方程求解.若方程有正整数解,则该数是数列中的项;若方程无解或解均不是正整数,则该数不是数列中的项.

角度2　已知数列的项写通项公式

例3 写出下列数列的一个通项公式.

(1)$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots$;

(2)$\frac{1}{1\times2},-\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},-\frac{1}{4\times5},\cdots$;

(3)0,1,0,1,…;

(4)9,99,999,9999,….

变式 若将例3(4)改为8,88,888,…,请写出该数列的一个通项公式;若改为0.8,0.88,0.888,…呢?

[素养小结]

根据数列的前几项求数列通项公式的解题思路

(1)先统一项的结构,如都化成分数、根式等形式.

(2)分析结构中变化的部分与不变的部分,探索变化部分的规律与对应序号间的函数解析式.

(3)对于正负交替出现的情况,可先观察其绝对值,再用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$处理符号.

(4)数列a,aa(表示个数与十位上的数字都是a,$a=1,2,\cdots,9$,下同),aaa,…的一个通项公式为$a_n=\frac{a}{9}(10^n-1)$.

(5)对于周期数列,可考虑拆成几个简单数列之和的形式,或者利用周期函数写出通项公式.

◆ 要点三　数列中项的单调性及最值

典例解析

例4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n}{n^2+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证:$0<a_n<1$;

(2)判断$\{a_n\}$是递增数列还是递减数列,并说明理由.

变式 (1)已知$a_n=\frac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列$\{a_n\}$前50项中的最小项和最大项分别是 (　　)

A. a_1,a_{50}　　B. a_1,a_8

C. a_8,a_9　　D. a_9,a_{50}

(2)数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-2n^2+\lambda n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\lambda\in\mathbf{R})$,若$\{a_n\}$是递减数列,则$\lambda$的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,4)$　　B. $(-\infty,4]$

C. $(-\infty,6)$　　D. $(-\infty,6]$

[素养小结]

(1)判断数列单调性的方法:

①定义法;②函数法.

(2)求数列最值的方法:

①函数的单调性法:令$a_n=f(n)$,$n\in\mathbf{N}^*$,通过研究函数$f(n)$的单调性来研究数列$\{a_n\}$的最大(小)项.

②不等式组法:先假设数列有最大(小)项,不妨设a_n最大,则满足$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\a_n\geqslant a_{n+1}\end{cases}(n\geqslant 2)$,解不等式组便可得到$n$的取值范围,从而确定$n$的值;不妨设$a_m$最小,则满足$\begin{cases}a_m\leqslant a_{m-1},\\a_m\leqslant a_{m+1}\end{cases}(m\geqslant 2)$,解不等式组便可得到$m$的取值范围,从而确定$m$的值.

第2课时　数列的递推公式与前 n 项和

【学习目标】

1. 会用递推公式表示数列，能根据数列的递推公式写出数列的前几项.
2. 了解数列的前 n 项和，并能利用 S_n 与 a_n 的关系解决一些简单问题.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　数列的递推公式

概念：如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫作这个数列的__________.

作用：知道了首项或前几项，以及递推公式，就能求出数列的每一项.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)所有的数列都有递推公式.　(　　)

(2)数列的递推公式是关于 n 的函数关系式.　(　　)

(3)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-2$，则 $a_2=4$.　(　　)

2. 仅由数列$\{a_n\}$的递推公式 $a_n=3a_{n-1}(n\geqslant 2, n\in \mathbf{N}^*)$能否确定这个数列？若再已知 $a_2=3$ 呢？

典例解析

例1　分别写出下列数列的一个递推公式.

(1)13,31,49,67,…；

(2)1,3,7,15,…；

(3)1,−2,4,−8,16,….

例2　已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2+a_n}$，写出它的前5项，并归纳出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

变式　(1)[2026·重庆一中高二月考] 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_5=\dfrac{6}{5}$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2, n\in \mathbf{N}^*)$，则 $a_1=$　(　　)

A. $\dfrac{8}{5}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 1　　D. 2

(2)[2026·福建龙岩一中高二期中] 若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=6$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，则 $a_{985}=$　(　　)

A. $-\dfrac{7}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{5}{7}$　　D. 6

[素养小结]

(1)求递推公式的方法：当不能明显看出数列的项的取值规律时，可以尝试通过运算来寻找规律，如依次取出数列的某些项，减去或除以它的前一项，再对差或商加以观察.

(2)递推公式反映的是相邻两项(或多项)之间的关系.要已知某一项(或某几项)，才可依次求得其他的项.若序号很大，则应考虑数列是否具有规律性(周期性).

(3)某些用递推公式给出的数列，写出数列的前几项后，由前几项分析其特点、规律，即可归纳总结出数列的一个通项公式.

(4)具有形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，$n\in\mathbf{N}^*$ 的递推关系的数列，可以利用累加法或累乘法求出通项公式.

◆ 要点二　数列的前 n 项和

1. 概念及表示

我们把数列$\{a_n\}$从第 1 项起到第 n 项止的各项之和，称为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，记作 S_n，即 $S_n=$________________.

2. 数列的前 n 项和公式

如果数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个________来表示，那么这个________叫作这个数列的前 n 项和公式.

3. 数列$\{a_n\}$的通项公式与前 n 项和 S_n 的关系

在数列$\{a_n\}$中，S_n 为其前 n 项和，显然 $S_1=a_1$，而 $S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}(n\geqslant2)$，于是 $a_n=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_, & n=1,\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, & n\geqslant2.\end{cases}$

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3n+1$，则 $a_1=4$，$a_4=3$.　(　　)

(2)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+1$，则 $a_n=2n-1$.　(　　)

(3)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $a_3+a_4+a_5+a_6=S_6-S_2$.　(　　)

典例解析

例 3 (1)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n$，则 $a_4+a_5=$　(　　)

A. 48　　B. 32

C. 24　　D. 8

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，则数列$\{a_n\}$的前 3 项和 $S_3=$________.

变式 (1)[2025·山东青岛高二质检] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2+n$，则 $a_7=$　(　　)

A. 11　　B. 12

C. 13　　D. 14

(2)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=an^2$，若 $S_{10}=600$，则 $a_3-a_5-a_6=$________.

[素养小结]

对于已知数列的前 n 项和公式求数列的某一项问题，主要利用定义解决.

◆ 要点三　利用数列的前 n 项和公式求通项公式

典例解析

例 4 下面给出了数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，求$\{a_n\}$的通项公式.

(1)$S_n=2n^2-3n$；

(2)$S_n=4-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

变式 (1)[2025·重庆巴蜀中学高二期中] 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=-n^2+14$，则$\{a_n\}$的通项公式为____________.

(2)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3^n-2$(n 为正整数)，则此数列的通项公式为 $a_n=$____________.

[素养小结]

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 求解通项公式时，一般先根据 $a_1=S_1$ 求出 a_1，再根据 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$ 计算出当 $n\geqslant2$ 时的通项公式，然后验证 a_1 是否满足上式，由此决定数列$\{a_n\}$的通项公式是否需要分段书写.

4.2 等差数列

4.2.1 等差数列的概念

第 1 课时 等差数列的概念与通项公式

【学习目标】

1. 理解等差数列的概念,能用文字语言、符号语言、图形语言描述等差数列的概念,能根据等差数列的定义判断或证明已知数列是否是等差数列.

2. 理解等差数列的通项公式,能根据定义归纳出等差数列的通项公式,会用通项公式解决一些简单问题.

课堂明新知 知识导学 典例探究

◆ **要点一 等差数列的有关概念与表示**

等差数列与公差:如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫作________数列,这个常数叫作等差数列的________,公差通常用字母 d 表示.

以上定义用符号表示为____________(d 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$).等差数列的定义用符号语言表示,其本质是等差数列的递推公式.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若一个无穷数列$\{a_n\}$的前 4 项分别是 1,2,3,4,则它一定是等差数列. ( )

(2)若一个数列从第 2 项起每一项与它前一项的差都是常数,则这个数列一定是等差数列.

(3)当数列$\{a_n\}$为常数列时,数列$\{a_n\}$不是等差数列. ( )

典例解析

例 1 判断下列数列是否为等差数列,如果是,指出它的公差.

(1)在数列$\{a_n\}$中,$a_n=3n+2$;

(2)在数列$\{b_n\}$中,$b_n=n^2+n$;

(3)在数列$\{c_n\}$中,$c_n=8$.

变式 (多选题)下列数列中为等差数列的是( )

A. 9,9,9,9,9

B. 4,7,10,13,16

C. ln 3,ln 9,ln 27,ln 81

D. $2^5,2^4,2^3,2^2$

[素养小结]

利用定义法判断是否为等差数列时,从第 2 项起检验每一项与它的前一项的差是否都等于同一个常数,若是同一个常数,则是等差数列,否则不是等差数列.

◆ **要点二 等差中项**

等差中项:由三个数 a,A,b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列,这时,A 叫作 a 与 b 的__________,并且 $2A=a+b$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)任意两个实数都存在等差中项. ( )

(2)若 a,b,c 是等差数列,则 $c+a=2b$. ( )

典例解析

例 2 (1)若 $a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$,$b=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$,则 a,b 的等差中项为 ( )

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)已知 $2m$ 和 n 的等差中项是 5,m 和 $2n$ 的等差中项是 4,则 m 和 n 的等差中项是________.

变式 (1)一个等差数列的前 4 项是 $1,x,a,2x$,则 $x=$________,$a=$________.

(2)方程 $x^2+4x+1=0$ 的两根的等差中项为 ( )

A. 4　　B. -4

C. 2　　D. -2

[素养小结]

三个数 a,b,c 成等差数列的条件是 $b=\frac{a+c}{2}$(或 $2b=a+c$),利用该条件可进行等差数列的判定或求解有关等差中项的计算问题.若需证明$\{a_n\}$为等差数列,则可通过证明 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$来实现.

◆ 要点三　等差数列的通项公式及应用

1. 通项公式:若等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d,则其通项公式为 $a_n=$____________.

2. 等差数列的图象:等差数列$\{a_n\}$的通项公式可写成 $a_n=dn+(a_1-d)$.点(n,a_n)分布在一条以 d 为斜率的直线上,是这条直线上一列________.

3. 等差数列的单调性:在等差数列$\{a_n\}$中,若公差 $d>0$,则数列$\{a_n\}$为________数列;若公差 $d<0$,则数列$\{a_n\}$为________数列.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若数列$\{a_n\}$满足 $a_n=kn+b$(k,b 为常数),则数列$\{a_n\}$一定是等差数列. ( )

(2)若数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n+1,n\geq 2,\end{cases}$ 则$\{a_n\}$是等差数列. ( )

(3)各项都为正数的等差数列的公差一定大于 0. ( )

2. 等差数列的通项公式一定是关于 n 的一次函数吗?

典例解析

角度 1　等差数列的基本量运算

例 3 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

(1)若 $a_1=2,d=3$,求 a_{10};

(2)若 $a_1=3,a_n=21,d=2$,求 n;

(3)若 $a_1=12,a_6=27$,求 d;

(4)若 $d=-\frac{1}{3}$,$a_7=8$,求 a_1 和 a_n.

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$,公差$d=3$,则$a_{675}=$______.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_5=11$,$a_1+a_2+a_3=15$,则$a_n=$____________.

[素养小结]

等差数列通项公式的求法与应用技巧

(1)等差数列的通项公式可由首项与公差确定,所以要求等差数列的通项公式,只需求出首项与公差.

(2)等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$中共含有四个参数,即a_1,d,n,a_n,如果知道了其中的任意三个数,那么就可以由通项公式求出第四个数,这一求未知量的过程,我们通常称之为"知三求一".

角度2 等差数列的函数特征

例4 (多选题)已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$,则下列说法中正确的是 ( )

A. 数列$\{a_n\}$是递增数列

B. 数列$\{na_n\}$是递增数列

C. 数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是递减数列

D. 数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$为递增数列,若$a_1=\dfrac{1}{25}$,且从第10项开始每项都大于1,则此等差数列的公差d的取值范围是____________.

(2)写出一个同时满足①②③的数列$\{a_n\}$的通项公式:$a_n=$________.

①数列$\{a_n\}$是无穷等差数列;

②数列$\{a_n\}$为递减数列;

③数列$\{|a_n|\}$的第5项为最小项.

◆ 要点四 等差数列的判定与证明

典例解析

例5 [2026·天津蓟州中学高二月考] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+3a_n}$.

(1)判断数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是否为等差数列?并说明理由.

(2)求a_{20}.

变式 [2025·四川南充一中高二开学考] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{5}{2}$,$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$,证明数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-2}\right\}$是等差数列,并求数列$\{a_n\}$的通项公式.

[素养小结]

判定等差数列常用的两种方法

(1)定义法:$a_{n+1}-a_n=d$(d为常数,$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列.

(2)等差中项法:$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$($n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列.

第2课时　等差数列的性质及实际应用

【学习目标】

1. 理解等差数列的通项公式,能说出等差数列通项公式的特征,并能灵活求解等差数列的基本量.
2. 能得出等差数列的一些性质,并利用其解决一些简单问题.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　等差数列的性质

1. 等差数列通项公式的变形与推广

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则

(1)$a_n=dn+(a_1-d)(n\in\mathbf{N}^*)$;

(2)$a_n=a_m+$________$(m,n\in\mathbf{N}^*)$;

(3)$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}(m,n\in\mathbf{N}^*$,且$m\neq n)$.

2. 等差数列与下标有关的性质

在等差数列$\{a_n\}$中,

①若$m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,

则$a_m+a_n=$________.

②若$m+n=2k(m,n,k\in\mathbf{N}^*)$,

则$a_m+a_n=$________.

③在有穷等差数列$\{a_n\}$中,与首末两项等距离的两项之和都相等,即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots$.

④若$a_{x_1}+a_{x_2}+a_{x_3}+\cdots+a_{x_n}=a_{y_1}+a_{y_2}+a_{y_3}+\cdots+a_{y_n}$,则$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$.　(　　)

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,a_k为a_{k-m},$a_{k+m}(m<k,m,k\in\mathbf{N}^*)$的等差中项.　(　　)

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2+a_4=a_6$.　(　　)

(4)在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_4+a_8+a_{12}=120$,则$a_8=40$.　(　　)

典例解析

例1 (1)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_3+a_9=12$,$a_2=4$,则$a_{10}=$　(　　)

A. 4　　B. 8

C. 3　　D. 6

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_3+a_6+a_{20}+a_{23}=36$,则$a_{13}=$________.

变式 (1)[2025·四川资阳高二期末]在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_2+a_8=10$,$a_4=4$,则公差$d=$　(　　)

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

(2)[2026·山东泰安高二期中]已知各项都为正数的等差数列$\{a_n\}$满足$a_1a_4+a_2a_6+a_4a_9+a_6a_8=25$,则$a_5=$　(　　)

A. 5　　B. $\sqrt{5}$

C. $\dfrac{5}{2}$　　D. $\dfrac{5}{4}$

[素养小结]

(1)灵活利用等差数列的性质,可以减少运算.令$m=1$,$a_n=a_m+(n-m)d$即变为$a_n=a_1+(n-1)d$,可以减少记忆负担.

(2)等差数列运算的两种常用思路

①基本量法:根据已知条件,列出关于a_1,d的方程(组),确定a_1,d,然后求其他量.

②巧用性质法:观察等差数列中项的序号,若满足$m+n=p+q=2r(m,n,p,q,r\in\mathbf{N}^*)$,则$a_m+a_n=a_p+a_q=2a_r$.

◆ 要点二　由等差数列构造新数列

1. 若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别是公差为d_1,d_2的等差数列,则

(1)数列$\{c+a_n\}$(c为任意常数)是公差为________的等差数列;

(2)数列$\{c\cdot a_n\}$(c为任意常数)是公差为________的等差数列;

(3)数列$\{pa_n+qb_n\}$(p,q是任意常数)是公差为________的等差数列.

2. 若数列$\{a_n\}$为等差数列,则$a_m,a_{m+k},a_{m+2k},a_{m+3k},\cdots(m,k\in\mathbf{N}^*)$仍为等差数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d,取其奇数项组成一个新数列,则此数列是公差为$2d$的等差数列. (　　)

(2)若等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则数列$\{a_n+3\}$的公差为$d+3$. (　　)

(3)若$\{a_n\}$是等差数列,则数列$\{2a_n\}$也是等差数列. (　　)

(4)若数列$a_1,a_3,a_5,\cdots$和$a_2,a_4,a_6,\cdots$都是公差为d的等差数列,则$a_1,a_2,a_3,\cdots$也是等差数列. (　　)

典例解析

例2 (1)已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,且$a_1=25,b_1=75,a_2+b_2=100$,那么数列$\{a_n+b_n\}$的第37项为________.

(2)已知等差数列$-2,1,4,7,10,\cdots$,现在其每相邻两项之间插入一个数,使之成为一个新的等差数列$\{a_n\}$.求新数列$\{a_n\}$的通项公式.

变式 在无穷等差数列$\{a_n\}$中,首项$a_1=3$,公差$d=-5$,依次取出序号能被4除余3的项组成数列$\{b_n\}$.

(1)求b_1和b_2.

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式.

(3)数列$\{b_n\}$中的第506项是$\{a_n\}$中的第几项?

[素养小结]

对于任何形式的构造数列,判断其是否为等差数列,一般从两个方面进行:(1)定义,即$a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$是否为常数;(2)通项公式是否为关于$n$的一次函数.

◆ 要点三　灵活设元求解等差数列

典例解析

例3 (1)现有三个数构成等差数列,这三个数的和为9,前两项的积为后一项的6倍,求这三个数.

(2)已知四个数组成递增的等差数列,中间两项的和为2,首末两项的积为-8,求这四个数.

变式 已知递增的等差数列$\{a_n\}$的前三项的和为21,前三项的积为231,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

[素养小结]

常见设元技巧

(1)当等差数列$\{a_n\}$的项数n为奇数时,可设中间一项为a,再用公差d向两边分别设项:…,$a-2d$,$a-d$,a,$a+d$,$a+2d$,….

(2)当等差数列$\{a_n\}$的项数n为偶数时,可设中间两项为$a-d$,$a+d$,再以公差$2d$向两边分别设项:…,$a-3d$,$a-d$,$a+d$,$a+3d$,…,这样可减少计算量.

◆ **要点四　等差数列的实际应用**

典例解析

例4 某公司经销一种数码产品,第1年可获利200万元.从第2年起,由于市场竞争等方面的原因,其利润每年比上一年减少20万元,按照这一规律,如果公司不开发新产品,也不调整经营策略,从哪一年起,该公司经销这一产品将亏损?

变式 《周髀算经》中有这样一个问题:冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气,自冬至日起,其日影长依次成等差数列,若立春当日日影长为10.5尺,立夏当日日影长为4.5尺,则春分当日日影长为 (　　)

A. 4.5尺　　B. 5尺

C. 5.5尺　　D. 7.5尺

[素养小结]

求解等差数列实际应用问题的关键是认真审题,挖掘出"等差"变化的含义,进一步明确首项、公差、项数等基本量.

4.2.2　等差数列的前n项和公式

第1课时　等差数列的前n项和公式

【学习目标】

1. 能说明等差数列前n项和公式的特征,能灵活运用求和公式解决一些简单问题.
2. 会求等差数列前n项和的最值.
3. 会计算含绝对值的前n项和.

课堂明新知　　知识导学　典例探究

◆ **要点一　等差数列的前n项和公式**

等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式

已知量	首项、末项与项数	首项、公差与项数
求和公式	$S_n=$________	$S_n=$________

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则当$n\geqslant 2$时,等差数列$\{a_n\}$的前$n-1$项的和$S_{n-1}=(n-1)a_1+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}d$. (　　)

(2)等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式是关于整数n的二次函数. (　　)

(3)等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式的常数项为0. (　　)

(4)设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则S_n与a_n不可能相等. (　　)

典例解析

例 1 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,公差为 d.

(1)若 $S_8=48$, $S_{12}=168$,求 a_1 和 d;

(2)若 $a_6=10$, $S_5=5$,求 a_8 和 S_8.

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $a_1=2$,且 $a_4+a_{19}=0$,则 $S_{21}=$ ( )

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_2+a_9=8$,$S_5=-5$,则 S_{15} 的值为 ( )

A. 125 B. 135

C. 145 D. 155

[素养小结]

等差数列前 n 项和的基本计算

(1)利用基本量求值.

等差数列的通项公式和前 n 项和公式中有五个量 a_1,d,n,a_n 和 S_n,这五个量可以“知三求二”.一般是利用公式列出基本量 a_1 和 d 的方程组,解出 a_1 和 d,便可解决问题.解题时注意整体代换的思想.

(2)结合等差数列的性质解题.

等差数列的常用性质:若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q$,特别地,若 $m+n=2p$,则 $2a_p=a_m+a_n$,常与求和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 结合使用.

◆ 要点二 等差数列的前 n 项和的最值

1. 从二次函数的角度理解等差数列的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$可化成关于 n 的表达式:$S_n=$________________.当 $d\neq 0$ 时,S_n 关于 n 的表达式是一个常数项为零的二次表达式,即点(n,S_n)在其相应的________函数的图象上,这就是说等差数列的前 n 项和公式是关于 n 的二次函数,它的图象是抛物线 $y=\dfrac{d}{2}x^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)x$ 上横坐标为正整数的一群孤立的点.

2. 等差数列前 n 项和的最值

(1)利用邻项变号法:

当 $a_1>0$,$d<0$ 时,S_n 有________值,使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组__________确定;

当 $a_1<0$,$d>0$ 时,S_n 有________值,使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组__________确定.

(2)利用二次函数的最值:

$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$,$n\in\mathbf{N}^*$,若 $d\neq 0$,则从二次函数的角度看:当 $d>0$ 时,S_n 有______值;当 $d<0$ 时,S_n 有______值.当 n 取最接近对称轴的正整数时,S_n 取到最值.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若等差数列$\{a_n\}$满足 $a_7+a_8+a_9>0$,$a_7+a_{10}<0$,则当 $n=7$ 时,数列$\{a_n\}$的前 n 项和最大. ( )

(2)若 $a_1>0$,$d<0$,则等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 有最大值,且最大值就是所有正项之和,也是所有非负项之和. ( )

(3)在数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=32$,$a_{n+1}=a_n-4$,则前 n 项和 S_n 取得最大值时 n 的值有两个. ( )

典例解析

例 2 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $a_1=25$,$S_{17}=S_9$,求 S_n 的最大值.

变式 (1)[2025·西安西北工业大学附中高二期末] 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_5+a_8<0$,$S_{11}>0$,则S_n的最大值为 ( )

A. S_5 B. S_6

C. S_7 D. S_8

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_6=-600$,当且仅当$n=30$时S_n取得最小值,则$\{a_n\}$的公差d的取值范围为__________.

[素养小结]

求等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n最值的方法

(1)寻找数列$\{a_n\}$正、负项的分界点,可利用等差数列的性质或利用$\begin{cases}a_n\geqslant 0,\\a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}a_n\leqslant 0,\\a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}$来寻找;

(2)运用二次函数的性质求最值,注意$n\in\mathbf{N}^*$.

◆ **要点三 数列$\{|a_n|\}$的前n项和**

典例解析

例3 已知$\{a_n\}$为等差数列,$a_3=98$,$a_6=86$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前n项和.

变式 [2025·天津实验中学滨海学校高二月考] 在数列$\{a_n\}$中,已知$a_1=-20$,$a_{n+1}=a_n+4$,求$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$.

[素养小结]

由等差数列$\{a_n\}$求数列$\{|a_n|\}$的前n项和的技巧(其中S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和)

(1)若等差数列$\{a_n\}$的各项都为非负数(或非正数),则数列$\{|a_n|\}$就是数列$\{a_n\}$(或$\{-a_n\}$),可以直接求解.

(2)若数列$\{a_n\}$的前k项为负数,从第$k+1$项开始以后的项都为非负数,则数列$\{|a_n|\}$的前n项和$T_n=\begin{cases}-S_n,n\leqslant k,\\S_n-2S_k,n>k.\end{cases}$

(3)若数列$\{a_n\}$的前k项为正数,从第$k+1$项开始以后的项都为非正数,则数列$\{|a_n|\}$的前n项和$T_n=\begin{cases}S_n,n\leqslant k,\\2S_k-S_n,n>k.\end{cases}$

第 2 课时　等差数列的前 n 项和的性质及实际应用

【学习目标】

1. 理解等差数列前 n 项和的性质.
2. 能在具体的问题情境中发现数列的等差关系,抽象出等差数列模型,并应用该模型解决相关问题.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　等差数列的前 n 项和的性质

1. 若数列$\{a_n\}$是等差数列,S_n 是其前 n 项和,$k\in\mathbf{N}^*$,那么________,________,________构成公差为 k^2d 的等差数列,如图所示.

$$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_k}_{S_k}+\underbrace{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}_{S_{2k}-S_k}+\underbrace{a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{3k}}_{S_{3k}-S_{2k}}}^{S_{3k}}$$

2. 若 S_n,T_n 分别为等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和,则$\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{a_n}{b_n}$,$\frac{a_m}{b_n}=\frac{2n-1}{2m-1}\cdot\frac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}$.
3. 若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列,且公差为$\frac{d}{2}$.
4. 设数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,$S_{奇}$ 是前 n 项中奇数项的和,$S_{偶}$ 是前 n 项中偶数项的和,则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=S_{奇}+S_{偶}$.当等差数列的项数 n 为奇数时,中间一项记为 $a_{中}$.有如下性质:

(1)当 n 为偶数时,$S_{偶}-S_{奇}=$________,$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=$________;

(2)当 n 为奇数时,$S_{奇}-S_{偶}=$________,$S_{奇}=$________,$S_{偶}=$________,$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=$________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若$\{a_n\}$是等差数列,则 $a_1+a_2+a_3$,$a_4+a_5+a_6$,$a_7+a_8+a_9$ 也是等差数列.　(　　)

(2)若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 S_4,S_8,S_{12} 成等差数列.　(　　)

(3)等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,则$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{21}{32}$.　(　　)

典例解析

例 1 (1)已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若$\frac{S_m}{m}-S_1=1(m\geqslant2$,且 $m\in\mathbf{N}_+)$,则$\frac{S_{2m-1}}{2m-1}-S_1=$　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

(2)已知一个等差数列的前 12 项和为 354,前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 32∶27,求该数列的公差 d.

(3)设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若$\frac{S_6}{S_3}=4$,求$\frac{S_9}{S_6}$.

变式 (1)[2026·四川绵阳南山中学高二月考]已知等差数列$\{a_n\}$共有 $2n+1$ 项,奇数项之和为 220,偶数项之和为 200,则 $n=$　(　　)

A. 10　　B. 11　　C. 20　　D. 21

(2)已知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为等差数列,其前 n 项和分别为 S_n,T_n,且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+2}{n+3}$,则$\frac{a_5}{b_5}=$________.

(3)已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $S_3=3$,$S_6=24$,则 $S_{12}=$________.

［素养小结］

(1)涉及一个有限的等差数列的奇数项和与偶数项和之比的问题，宜用等差数列前 n 项和的性质求解.

(2)涉及两个等差数列有限项和之比的问题，通常是将其转化为两个等差数列前 n 项和之比来处理.

(3)涉及等差数列中与 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 有关的问题，可利用 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列解决.

◆ **要点二　等差数列前 n 项和的实际应用**

典例解析

例2 1个水池有若干出水量相同的水龙头，如果所有水龙头同时注水，那么24分钟可注满水池. 如果开始时全部开放，以后每隔相等的时间关闭1个水龙头，到最后1个水龙头关闭时，恰好注满水池，而且最后1个水龙头注水的时长恰好是第1个水龙头注水时长的5倍，求最后关闭的这个水龙头注水的时长.

变式 ［2025·辽宁葫芦岛一中高二月考］某演出团选出155名演员站成 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 排进行演出. 已知最后一排的人数为20，从最后一排开始，每一排人数比前面一排人数多1，则 $n=$________，最前面一排的人数为________.

［素养小结］

(1)解决与等差数列前 n 项和有关的应用题的关键是构造合适的等差数列.

(2)遇到与正整数有关的应用题时，可以考虑与数列知识联系，抽象出数列的模型，并用有关知识解决相关的问题，是数学建模的核心素养的体现.

4.3　等比数列

4.3.1　等比数列的概念

第1课时　等比数列的概念与通项公式

【学习目标】

1. 理解等比数列的概念，能用文字语言、符号语言、图形语言描述等比数列的概念，能根据等比数列的定义判断或证明已知数列是否是等比数列.

2. 理解等比数列的通项公式，能根据定义归纳出等比数列的通项公式，会用通项公式解决一些简单问题.

课堂明新知　知识导学　典例探究

◆ **要点一　等比数列及等比中项的概念**

1. 等比数列

(1)定义：一般地，如果一个数列从________起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列叫作________数列，这个常数叫作等比数列的________，公比通常用字母 q 表示(显然 $q\neq 0$).

(2)符号表示：以上定义用符号表示为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 或 $a_{n+1}=qa_n$(q 为常数，$n\in\mathbf{N}^*$). 等比数列的定义用符号语言表示，其本质是等比数列的递推公式.

2. 等比中项

(1)定义：如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫作 a 与 b 的________，此时，$G^2=$________.

(2)推广:在等比数列$\{a_n\}$中,从第2项起,每一项都是相邻两项的等比中项.

特别地,等比数列$\{a_n\}$中的某一项a_k是与该项等距离的两项a_{k-m},a_{k+m}($k>m$)的等比中项,即$a_k^2=a_{k-m}\cdot a_{k+m}$.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)数列1,−1,1,−1是等比数列. ( )

(2)若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n$($n\in\mathbf{N}^*$),那么$\{a_n\}$是等比数列. ( )

(3)若一个数列从第2项起每一项与前一项的比为常数,则该数列为等比数列. ( )

(4)等比数列的首项、公比均不能为零. ( )

(5)$G^2=ab$是a,G,b成等比数列的充要条件. ( )

典例解析

例1 判断下列数列是否是等比数列,如果是,写出它的公比.

(1)$1,\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{1}{12},\cdots$;

(2)$10,10,10,10,10,\cdots$;

(3)$\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\left(\frac{2}{3}\right)^4,\cdots$;

(4)$1,0,1,0,1,0,\cdots$;

(5)$1,-4,16,-64,256,\cdots$.

例2 (1)设$m=-8,n=-2$,则m与n的等比中项为 ( )

A. 4　　B. −4

C. ±4　　D. −5

(2)已知$1,a,4a-4$成等比数列,则$a=$ ( )

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 1

变式 (1)$\sqrt{5}-2$和$\sqrt{5}+2$的等差中项与等比中项分别为 ( )

A. $\sqrt{5},\pm2$　　B. $2,\pm\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5},\pm1$　　D. $1,\pm\sqrt{5}$

(2)已知等比数列$\{a_n\}$中的前三项为$a,2a+2,3a+3$,则实数a的值为________.

[素养小结]

(1)判断一个数列是不是等比数列的方法:验证$\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\frac{a_4}{a_3},\cdots$是否等于同一个常数.

(2)在一个等比数列中,从第二项起,每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项和后一项的等比中项.

◆ 要点二　等比数列的通项公式

1. 通项公式

首项为a_1,公比为q的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为____________.

2. 等比数列的通项公式与指数型函数的关系

(1)在公比为q的等比数列$\{a_n\}$中,$a_n=a_1q^{n-1}$可改写成$a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$,当$q>0$且$q\neq1$时,$y=q^x$是一个________函数,此时等比数列$\{a_n\}$的图象是函数$y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x$的图象上______________.

(2)任给函数$f(x)=ka^x$(k,a为常数,$k\neq0$,$a>0$且$a\neq1$),则$f(1)=ka$,$f(2)=ka^2,\cdots,f(n)=ka^n,\cdots$构成一个等比数列$\{ka^n\}$,其首项为________,公比为________.

3. 等比数列的单调性

由指数函数的性质可知,

当$a_1>0,q>1$时,等比数列$\{a_n\}$是递增数列;

当$a_1<0,0<q<1$时,等比数列$\{a_n\}$是递增数列;